Преглед НЦД 7 (2005), 65–76

Desanka Radunović
(Matematički fakultet, Beograd)

TALASIĆI

Signal je fizička veličina koja se menja u prostoru, vremenu ili u zavisnosti od neke druge veličine. Diskretni signal je definisan nizom brojeva dobijenih pomoću odgovarajućeg uređaja. Služi za prenos informacija, koje predstavljaju unapred nepoznatu promenu u odnosu na prethodno stanje. Za razliku od ovog, nazovimo ga jednodimenzionog signala, dvodimenzioni signal je nazvan *slika*. Svuda oko nas su signali koje treba obraditi. Seizmička podrhtavanja, ljudski govor, vibracije motora, medicinske snimke, finansijske podatke, muziku, i mnoge druge tipove signala treba efikasno opisati, analizirati, očistiti od šuma, šifrovati, kompresovati, rekonstruisati, uprostiti, modelovati, razdvojiti ili locirati. Stoga su osnovni zadaci naučne discipline koja se naziva *obrada signala*: analiza i dijagnostika, kodiranje, kvantizacija i kompresija, prenos i čuvanje, sinteza i rekonstrukcija.

Do pre dvadesetak godina osnovni alat u obradi signala bila je Fourier-ova analiza.

1. Fourier-ova analiza

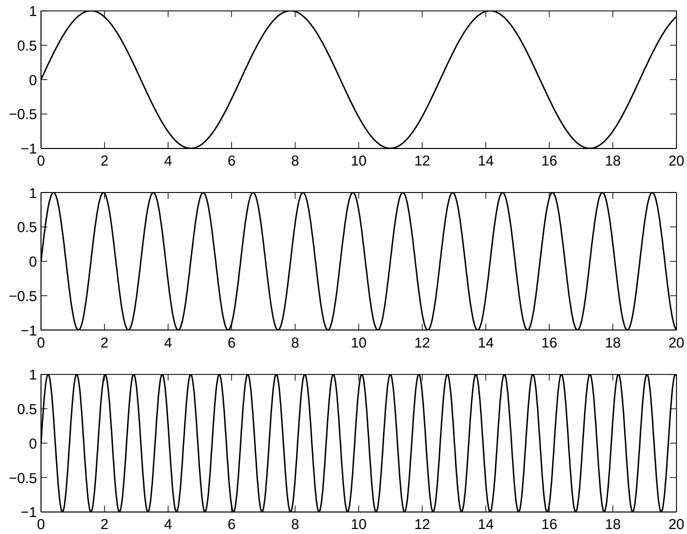
Ako signal zavisi od vremena, njegov grafik će obično biti predstavljen u koordinatnom sistemu vreme-amplituda, gde x-osa označava vreme, a y-osa amplitudu, tj. vrednost predstavljene fizičke veličine u datom vremenskom trenutku. Međutim, jedna od vrlo važnih informacija u praktičnim problemima je brzina, tj. učestanost, promene fizičke veličine. Na primer, različita je učestanost izlaženja dnevnih i nedeljnih novina. Frekvencija je mera brzine promene – ako se nešto brzo menja, kažemo da je visoke frekvencije, a ako se menja sporo, kažemo da je niske frekvencije. Informacija o brzini promene se jasnije iskazuje zapisom signala u frekvencijskom domenu, tj. u koordinatnom sistemu frekvencija-amplituda. Grafik u ovom slučaju pokazuje sa kojim intenzitetom se svaka frekvencija pojavljuje u signalu.

U medicini je poznat ECG (Electro Cardio Graphy) signal, koji registruje električnu aktivnost srca. Klasičan zapis je u vremenskom domenu, ali se sve više koriste novi kompjuterski ECG rekorderi koji mogu da daju informacije i o frekvencijskom sadržaju signala, i na osnovu kojih se lakše uočavaju neke patološke promene na srcu.

Frekvencijski sadržaj signala se određuje pomoću *Fourier-ove ili harmonijske analize*. Joseph Fourier je 1807. godine postavio tvrđenje da se svaka dovoljno glatka funkcija može predstaviti Fourieor-vim redom

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

tj. kao zbir njene srednje vrednosti a_0 i harmonika različite frekvencije k.



SLIKA 1. Sinusoide različite frekvencije

Ako su po apsolutnoj vrednosti veći koeficijenti uz sinusoide malih perioda, tj. velikih frekvencija k (treća sinusoida na slici 1), onda je i sam signal vrlo promenljiv (oscilatoran). Ako dominiraju koeficijenti uz sinusoide velikih perioda, tj. malih frekvencija k (prva sinusoida na slici 1), onda se i sam signal sporo menja (malo osciluje u odnosu na srednju vrednost).

Stoga vrlo važne informacije o signalu daje njegov *frekvencijski spektar*, koji je određen Fourier-ovim koeficijentima. Spektar ukazuje, kao što smo upravo zaključili, na promenljivost posmatrane veličine, a takođe, preko *Parseval-ove jednakosti*, govori i o *energiji* signala f,

$$(\text{energija}_f)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

2. Nedostaci Fourier-ove analize

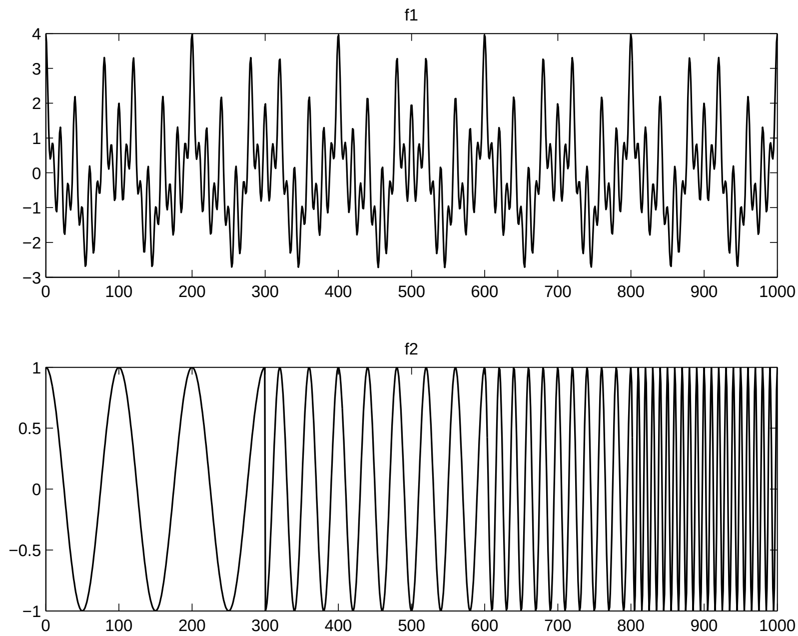
Zbog neograničenog trajanja sinusoide, Fourier-ova analiza nije pogodna za obradu nestacionarnih signala, a to su oni čiji se frekvencijski sadržaj menja sa vremenom. Na primer, signali

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \cos(2\pi * 10 * x) + \cos(2\pi * 25 * x) \\ &\quad + \cos(2\pi * 50 * x) + \cos(2\pi * 100 * x) \end{aligned}$$

i

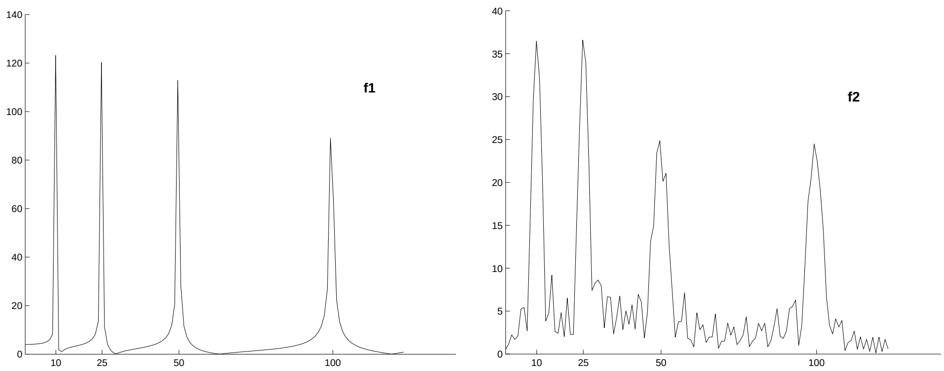
$$f_2(x) = \begin{cases} \cos(2\pi * 10 * x), & 0 < x < 300 \\ \cos(2\pi * 25 * x), & 300 < x < 600 \\ \cos(2\pi * 50 * x), & 600 < x < 800 \\ \cos(2\pi * 100 * x), & 800 < x < 1000 \end{cases}$$

su predstavljeni sa iste četiri sinusne funkcije. Razlika je u tome što u signalu f_1 sve četiri sinusoide traju sve vreme (za svako x u posmatranom intervalu), a u signalu f_2 kada se prva sinusoida zavrsi, počinje druga, pa se ona nastavlja trećom,



Slika 2. Stacionaran i nestacionaran signal

i na kraju signal završava četvrtom sinusoidom. Dakle, frekvencijski sadržaj signala f_2 se menja sa vremenom, te stoga kažemo da je signal nestacionaran. Grafici signala f_1 i f_2 po vremenu x (slika 2) su, očigledno, potpuno različiti. Međutim, njihovi frekvencijski spektri su vrlo slični (slika 3) i na osnovu njih se ne može zdoći do zaključka da se menja frekvencijski sadržaj signala f_2 sa vremenom.



Slika 3. Fourier-ova analiza stacionarnog i nestacionarnog signala

Tako se došlo do ideje da se nestacionaran signal podeli na manje vremenske segmente koji bi sadržali skoro stacionarne delove signala, i analizira frekvencijski sadržaj svakog pojedinog dela. Jasno je da bi Fourier-ovom analizom delova signala f_2 na intervalima dužine 100 dobili pravu informaciju o frekvencijskom sadržaju tog signala u svakom od intervala. Metoda koja se zasniva na ovoj ideji naziva se *Kratkotrajna Fourier-ova transformacija* (STFT = Short Time Fourier Transformation).

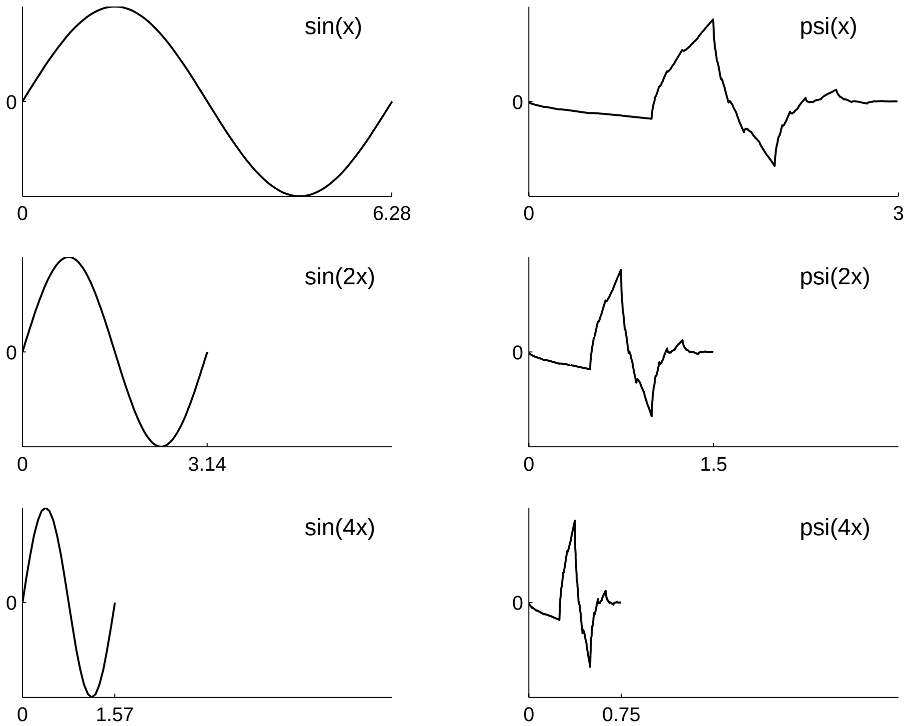
Deljenje funkcije na intervale se vrši pomoću tzv. *prozorske funkcije*. Jedan od najprostijih izbora prozorske funkcije je karakteristična funkcija intervala

$$W(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & x \notin [0,1) \end{cases}$$

Svakako, mogli bismo definisati prozorsku funkciju i na drugi način, ali ostaje kao glavni nedostatak ovoga pristupa konstantna "dužina prozora". Bilo bi mnogo pogodnije kada bismo koristili "uži prozor" u delu gde je signal jako promenljiv, a "širi prozor" u delu gde se signal sporo menja.

3. Transformacija talasićima

Analiza signala pomoću talasića, koju nazivamo *transformacija talasićima* (WT = Wavelet Transformation), upravo omogućava korišćenje "prozora" promenljive dužine.



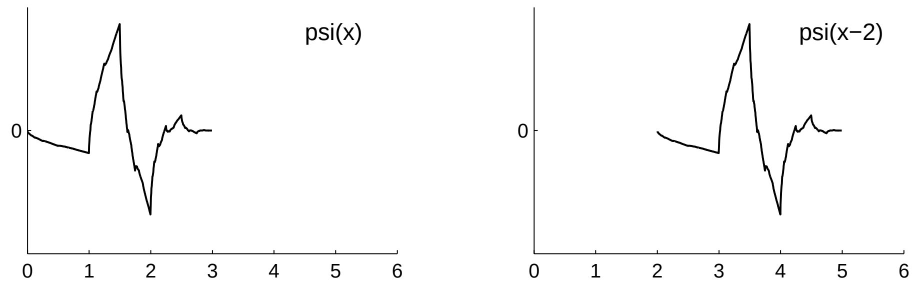
SLIKA 4. Sinusoida i talasić

Kao što je sinusoida osnovna funkcija Fourier-ove transformacije, *talasić*

$$\psi_{a,b}(x) = \psi\Big(\frac{x-b}{a}\Big)$$

je osnovna funkcija transformacije talasićima. Kao i sinusoida, talasić je oscilatorna funkcija (ima srednju vrednost nula), ali je, za razliku od sinusoide, različita od nule samo na konačnom intervalu. Zbog oscilatorne prirode nazvana je talasom, a zbog ograničenog trajanja malim talasom ili talasićem. Kao i sinusoida, promenom parametra a može se skupljati ili širiti (*dilatacija*, slika 4), a promenom parametra b pomerati duž vremenske ose (*translacija*, slika 5).

Jasno je da se izborom parametara a i b podešava širina i pozicija prozora. Širina prozora određuje frekvencijsku i vremensku rezoluciju. Što je vremenska rezolucija



Slika 5. Translacija talasića

bolja, frekvencijska rezolucija je lošija, i obrnuto. To znači da ne možemo tačno reći koje frekvencije postoje u datom vremenskom trenutku (princip neodređenosti).

Ono što treba istaći jeste da je Fourier-ova analiza određena konkretnom funkcijom, sinusoidom, dok talasić nije jednoznačno određen – definisana su samo pravila koja treba da budu zadovoljena da bi talasić ψ imao željena svojstva.

4. Diskretni talasići

Parametri a i b se mogu kontinualno menjati, što nije korisno sa stanovišta primene. Može se pokazati da se i pomoću prebrojivo mnogo dilatacija i translacija jednog talasića može rekonstruisati signal.

Tako dolazimo do pojma *diskretni talasići.* Oni su određeni izborom diskretnih vrednosti parametara a i b. Najčešće su te vrednosti stepeni broja 2, čime je definisana tzv. *diadska mreža* $a = 2^j$, $b = k\,2^j$. Svakoj tački ove mreže pridružen je talasić dobijen dilatacijom i translacijom osnovnog talasića ("majke"),

$$\psi_{jk}(x) = \psi(2^{-j}x - k)$$
$$\psi_{jk}(x) = 0, \quad x \notin [2^j k, 2^j(k+1)].$$

Parametar translacije k se menja linearno, a parametar dilatacije je stepen broja 2. On se na svakom novom nivou udvostručuje u odnosu na vrednost sa prethodnog nivoa, što znači da talasić postaje dvostruko širi. Broj tačaka u kojima se definišu talasići postaje dvostruko manji u odnosu na ovaj broj na prethodnom nivou, tj. rezolucija se smanjuje.

Na ovaj način ostvaruje se koncept *multirezolucije.* Za opisivanje brzo promenljivog dela signala koriste se uski, gusto raspoređeni talasići, a za opisivanje sporo promenljivog dela signala koriste se razvučeni, retko raspoređeni talasići,

$$f(x) = \sum_{j\in\mathcal{Z}} \sum_{k\in\mathcal{Z}} b_{j,k}\,\psi_{j,k}(x)$$

Teorijski indeks j, kojim se stepenuje broj 2, ide od $-\infty$ do $+\infty$. U praksi, broj nivoa rezolucije je konačan, što se postiže uvođenjem u reprezentaciju *funkcije skaliranja* $\varphi(x)$,

$$f(x) \approx \sum_{k\in\mathcal{Z}} a_{J,k}\,\varphi_{J,k}(x) + \sum_{j=1}^{J} \sum_{k\in\mathcal{Z}} b_{j,k}\,\psi_{j,k}(x)$$

Dilatacijama i translacijama funkcije skaliranja i talasića predstavlja se signal. Opseg u kome će se kretati parametar k zavisi od vremenskog trajanja signala. Prva suma, data funkcijom skaliranja, predstavlja osrednjenu vrednost signala, a dvostruka suma, data talasićem, detalje, tj. odstupanja od srednje vrednosti na različitim nivoima rezolucije. Dobar izbor funkcije skaliranja za predstavljanje nekog signala je onaj koji obezbeđuje da je najveći broj detalja, koeficijenata $b_{j,k}$, mali te se može zanemariti. To je suština kompresije signala pomoću talasića. Ona omogućava zapis signala pomoću malog broja podataka bez velike deformacije signala.

Objasnimo ukratko kako se konstruiše funkcija skaliranja $\varphi(x)$, koja predstavlja osnov teorije talasića i često se naziva "talasić otac" (father wavelet). Ona je rešenje *dilatacione jednačine*,

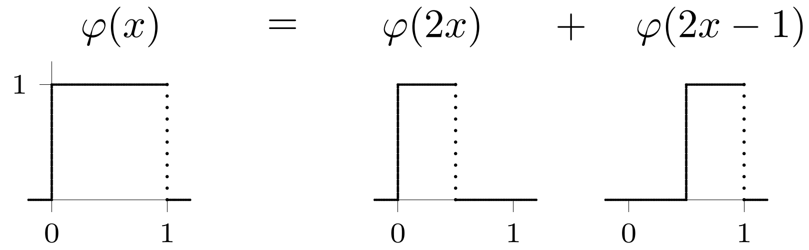
$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathcal{Z}} c(k)\varphi(2x - k).$$

Dilataciona jednačina je jednačina sa dve skale, i to je jedini tip jednačine čije rešenje je funkcija različita od nule na konačnom intervalu, ukoliko jednačina ima konačan broj sabiraka. Osobine rešenja u potpunosti zavise od koeficijenata $c(k)$ dilatacione jednačine. Više o tome možete pročitati i u knjizi [3] autora ovog teksta.

Linearnom kombinacijom dilatacija i translacija funkcije skaliranja, tzv. *jednačinom talasića*, definisan je "talasić majka" (mother wavelet),

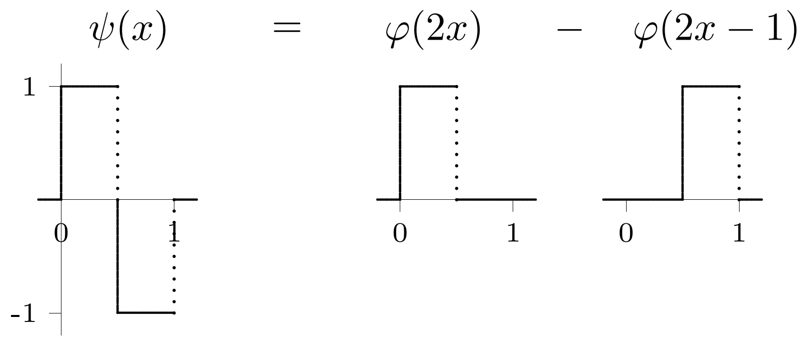
$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathcal{Z}} d(k)\varphi(2x - k).$$

Na primer, rešenje dilatacione jednačine koja ima samo dva koeficijenta različita od nule, $c(0) = c(1) = 1$, je *četvrtka* (slika 6)



Slika 6. Četvrtka

Četvrtkom je jednačinom talasića sa koeficijentima $d(0) = -d(1) = 1$ definisan *Haar-ov talasić* (slika 7).



Slika 7. Haar-ov talasić

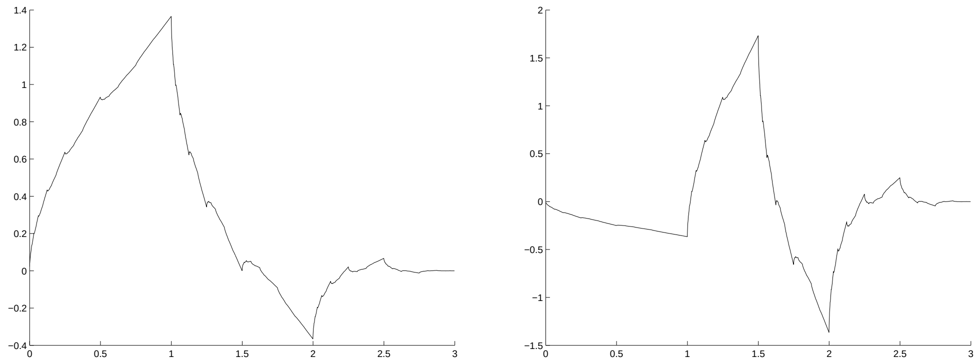
Korišćenjem ovih funkcija, signal se predstavlja stepenastom funkcijom, pri čemu su dužine konstantnih intervala različite – veće tamo gde se signal sporo menja, a manje u delovima gde se on brzo menja.

Za prapočetak teorije talasića može se smatrati Haar-ov rad [2] iz 1909. godine. Temelje moderne, konzistentne teorije talasića postavila je Ingrid Daubechies

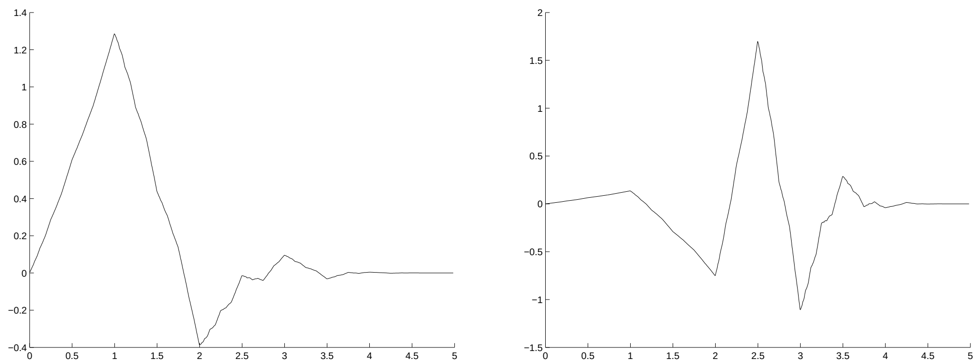
[1], povezujući talasiće sa maksimalno zaravnjenim filtrima koji se koriste u obradi signala. Formulisala je pravila za konstrukciju talasića koji imaju mnoge poželjne osobine, i koji su stoga nazvani njenim imenom – *Daubechies talasići DbN*. Karakterišu se time da:

- nemaju eksplicitan analitički izraz,
- različiti su od nule na intervalu $[0,\ 2N-1]$,
- ortogonalni su,
- tačno reprodukuju polinome stepena ne većeg od $(N-1)$,
- glatkost im se povećava sa povećanjem N.

Haar-ov talasić Db1 je najjednostavniji talasić ove klase. Slike 8 i 9 predstavljaju Daubechies funkciju skaliranja (levo) i talasić (desno) za $N=2$ i $N=4$.



Slika 8. Db2



Slika 9. Db4

5. Piramidalni algoritam

Za brzo računanje koeficijenata $a_{J,k}$ i $b_{j,k}$ u multirezolucijskoj reprezentaciji signala pomoću talasića koristi se *piramidalni algoritam*

$$a_{j,k} = \sum_l c(l-2k)a_{j-1,l}, \quad b_{j,k} = \sum_l d(l-2k)a_{j-1,l},$$

a ako su ovi koeficijenti dati signal se efikasno rekonstruiše korišćenjem *inverznog piramidalnog algoritma*

$$a_{j-1,l} = \sum_k \big(c(l-2k)a_{j,k} + d(l-2k)b_{j,k}\big).$$

Piramidalni algoritam je osnov tzv. *brze transformacije talasićima* (FWT = Fast Wavelet Transformation).

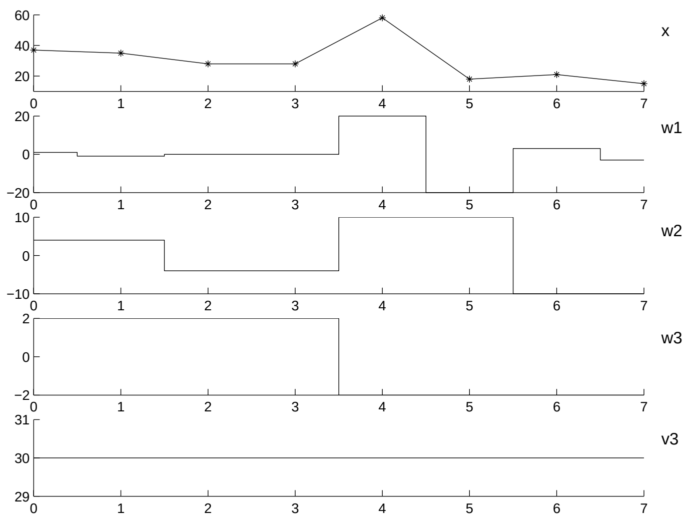
Ilustrujmo ga na primeru četvrtke, kojom se računaju aritmetičke sredine susednih vrednosti u signalu, i Haar-ovog talasića, kojim se računaju razlike susednih vrednosti u signalu. Koeficijenti kojima se transformacija vrši su koeficijenti jednačine skaliranja i jednačine talasića,

$$c(0) = c(1) = d(0) = -d(1) = 1.$$

Račun je prikazan šemom koja sledi.

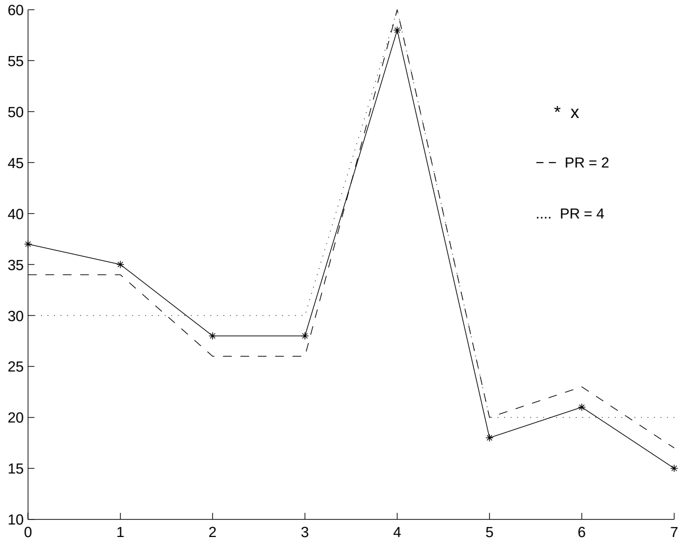
$$\begin{array}{l}
\boxed{37\quad 35\quad 28\quad 28\quad 58\quad 18\quad 21\quad 15} \\
\qquad\qquad \swarrow \qquad\qquad\qquad \searrow \\
\boxed{36\quad 28\quad 38\quad 18} \qquad\quad 1\quad 0\quad 20\quad 3 \\
\qquad \swarrow \quad \searrow \\
\boxed{32\quad 28} \qquad 4\quad 10 \\
\swarrow \quad \searrow \\
\boxed{30} \qquad 2 \\
\hline
\boxed{30} \qquad 2 \qquad 4\quad 10 \qquad 1\quad 0\quad 20\quad 3
\end{array}$$

Poslednja vrsta šeme sadrži jedan koeficijent funkcije skaliranja (uokviren), i sedam koeficijenata talasića: $2^0 = 1$ na poslednjem, trećem, nivou, $2^1 = 2$ na drugom, i $2^2 = 4$ na prvom nivou rezolucije. Na slici 10 predstavljeni su grafik signala (X), detalji na sva tri nivoa rezolucije (w1–w3), kao i osrednjenje na poslednjem, najgrubljem nivou rezolucije (v3).



Slika 10. Transformacija talasićima

Na šemi izračunavanja se može uočiti da je jedan koeficijent talasića jednak nuli, a od prostalih šest neki se mogu zanemariti, tj. zameniti nulom, bez velikih posledica po izgled signala. Da je to tačno govori slika 11, na kojoj je predstavljen polazni signal, kao i rekonstruisani signali dobijeni posle zanemarivanja koeficijenata većih od izabranog praga, u ovom slučaju 2, odnosno 4. Izbor praga zavisi od konkretnog problema i dozvoljene tolerancije, ali i od potrebe za kompresijom.



Slika 11. Kompresija signala

Naredne dve šeme prikazuju postupak sinteze, tj. rekonstrukcije kompresovanih signala na osnovu njihovih koeficijenata talasića i funkcije skaliranja. Pod uslovom da ne zanemarimo ni jedan koeficijent različit od nule, dobili bismo polazni signal, što predstavlja savršenu rekonstrukciju.

Šeme prikazuju rekonstrukciju kompresovanih signala, predstavljenih na slici 11.

Kompresija pri pragu jednakom dva je omogućila da se signal zapisan sa osam brojeva sačuva sa pet podataka, a pri pragu jednakom četiri samo sa tri podatka. Dobar izbor talasića je onaj koji će produkovati male koeficijente (detalje), tako da se ovi mogu zanemariti bez velike promene signala posle sinteze. Smanjenje broja podataka omogućava efikasan prenos na daljinu, skladištenje i brzo pretraživanje baze signala.

Kompresija: prag = 2

$$\boxed{30}\quad 2\quad 4\quad 10\quad 1\quad 0\quad 20\quad 3$$

$$\boxed{30}\quad 0\quad 4\quad 10\quad 0\quad 0\quad 20\quad 3$$

$$\boxed{30\quad 30}\quad 4\quad 10\quad 0\quad 0\quad 20\quad 3$$

$$\boxed{34\quad 26\quad 40\quad 20}\quad 0\quad 0\quad 20\quad 3$$

$$\boxed{34\quad 34\quad 26\quad 26\quad 60\quad 20\quad 23\quad 17}$$

Kompresija: prag = 4

$$\boxed{30}\quad 2\quad 4\quad 10\quad 1\quad 0\quad 20\quad 3$$

$$\boxed{30}\quad 0\quad 0\quad 10\quad 0\quad 0\quad 20\quad 0$$

$$\boxed{30\quad 30}\quad 0\quad 10\quad 0\quad 0\quad 20\quad 0$$

$$\boxed{30\quad 30\quad 40\quad 20}\quad 0\quad 0\quad 20\quad 0$$

$$\boxed{30\quad 30\quad 30\quad 30\quad 60\quad 20\quad 20\quad 20}$$

6. Primene

Ilustracije radi, navedimo samo neke primere talasića.

Uklanjanje šuma u podacima. Problem je otkriti stvarni signal na osnovu nepotpunih, indirektnih ili podataka sa šumom. Čišćenje signala se sastoji u odbacivanju detalja čiji su koeficijenti talasića ispod nekog praga, tako što se ovi koeficijenti zamenjuju nulama (kao u prethodnom primeru). Zatim se inverznom transformacijom talasićima dobija prečišćeni signal. Tako je Ronald Coifman sa kolegama sa Univerziteta Yale, korišćenjem tehnike koju on naziva adaptirana analiza talasićima, uspeo od šuma da očisti stari snimak Bramsove "Mađarske igre" izvedene na klaviru. Originalni snimak sa radija je bio potpuno neprepoznatljiv.

Seizmologija. Vrši se lociranje i predviđanje seizmičkih aktivnosti na osnovu koeficijenata talasića seizmičkog signala. Seizmički signali upozoravaju na mogućnost vibracije tla Zemlje, zemljotresa ili eksplozije. Te vibracije su talasi, koji imaju svoje longitudinalne i transverzalne komponente različite u različitim fazama dolaska zemljotresa. Seizmografom se registruju obe komponente i obrađuju pomoću diskretne vremenske transformacije talasićima, što omogućava lociranje seizmičkih aktivnosti. Osnovne funkcije koje se koriste za analizu seizmičkog signala moraju biti dobro definisane u vremenskom i frekvencijskom domenu.

Klimatologija. Na osnovu rezultata merenja temperature na različitim tačkama severne hemisfere u poslednja dva veka, naučnici žele da provere hipotezu da li industrija dovodi do globalnog zagrevanja. Problem predstavljaju značajne prirodne temperaturne fluktuacije koje treba dijagnostikovati i analizirati, a zatim ih obrisati iz registrovanog signala kako bi se došlo do podataka o veštačkom zagrevanju naše planete koje je posledica ljudske aktivnosti.

Primena u industriji. Vekovima su prosti zvučni testovi korišćeni za proveru kvaliteta materijala nekog predmeta, na primer udaranje prstom radi provere zrelosti lubenice. U novije vreme, savremena oprema za čitanje zvuka i obradu dobijenog signala koristi se za kontrolu kvaliteta u visoko automatizovanim fabrikama. Na primer, fabrike za proizvodnju kompjuterskih diskova pomoću Fourier-ove transformacije proveravaju neregularnost zvuka koji se dobija pri obrtanju diskova velikom brzinom. Tu tehniku, međutim, nije moguće primeniti na male neperiodične signale, koji se ne mogu obraditi ni Kratkotrajnom Fourier-ovom transformacijom (STFT). Tokom osamdesetih godina jednostavni eksperimenti su pokazali da se ovde može uspešno koristiti analiza talasićima. Za razliku od STFT, analiza talasićima dopušta proizvoljno dobro frekvencijsko i vremensko razlaganje na visokim frekvencijama. To znači da kada se, na primer, signal sastoji od dva praska, oni mogu primenom talasića da se razdvoje ukoliko se koriste dovoljno visoke rezolucije. Analiza talasićima takođe omogućava dobru i stabilnu multirezolucijsku reprezentaciju i efikasna numerička izračunavanja, što nije moguće u Fourier-ovoj analizi.

Ove osobine su navele Hisakazu Kikuchi i njegove kolege da koriste transformacije talasićima za analizu eksplozija u motorima automobila. Eksplozije se pojavljuju zbog greške u kontroli paljenja pri startovanju motora. One stvaraju udarne talase, koji mogu čak i da unište motor. Njihovo otkrivanje i analiza su važni zbog poboljšanja sistema paljenja. Podaci iz akustične vibracione analize (osnovna metoda koja se koristi za izučavanje eksplozija) sadrže lažne informacije, kao što je buka koja se stvara pri pokretanju mehaničkih delova. Druga metoda koji se koristi u ovu svrhu, statistička analiza, takođe je nepogodna jer su detonacije nestalne. Transformacijom talasićima zvučnog signala koji se dobija pri paljenju motora se, međutim, dobijaju korisne informacije. Kikuchi je konstruisao brzi procesor za video prikaz podataka dobijenih analizom talasićima. U cilju provere predloženih rešenja, izvedena su dva zanimljiva eksperimenta. U prvom je identifikovano ono za šta se verovalo da su karakteristične komponente zvuka motora. Njihovom sintezom je dobijen zvuk vrlo sličan pravom zvuku motora, što je potvrdilo stručnjacima da su ključne komponente uspešno identifikovane. U drugom eksperimentu su izvršena poređenja mogućnosti analize talasićima i senzora pritiska da otkriju eksplozije. Senzor pritiska, koji beleži podatke o pritisku unutar cilindra motora, bio je najbolje sredstvo za otkrivanje eksplozija. Međutim, njegovo korišćenje u fabrikama je veoma skupo jer ga treba posebno podesiti prema motoru, načinu vožnje (brzini, ubrzanju), vremenskim uslovima itd. Pokazalo se da je analiza talasićima tačnija i efikasnija u otkrivanju eksplozija od senzora pritiska.

Primena u medicini. Jedna oblast primene, koja obećava, je kompresija elektrokardiograma (EKG) čoveka, što omogućava formiranje EKG baza podataka i prenošenje EKG signala telefonskim linijama. Pri tome je bitna maksimalna efikasnost i minimalna greška. Jedan od kriterijuma efikasnosti kompresije je odnos broja bita originalnog podatka i broja bita kompresovanog podatka (PCD). Jie Chen i njegove kolege sa jednog japanskog univerziteta su predložili algoritam obrade EKG-a baziran na talasićima za koji je PCD između 5.5% i 13.3%. Pri tome je ovaj algoritam brz i jednostavan, a očekuju se dalja poboljšanja. Alternativni prilaz kompresiji EKG podataka, koji koristi višekanalnu analizu, razvili su Makoto Nakashizuka i njegove kolege sa Nigata univerziteta. Pri kompresiji ovim algoritmom zadržavaju se važne osobine EKG signala koje konvencionalne metode transformacije nisu uspele da sačuvaju. Ove osobine su vrlo važne za otkrivanje nepravilnosti u radu srca.

Katalogizacija otisaka prstiju je jedan od primera uspešne primene talasića u obradi slike. U FBI se nalazi oko 200 miliona kartica sa otiscima prstiju. Svaki otisak prsta se digitalizuje na rezoluciju od 500 pixela po inču sa 256 nivoa skale sivih tonova po pixelu. Stoga jedan otisak zauzima oko 700000 pixela, što je približno 0.6Mbyte memorije. Dakle, potrebno je arhivirati veliki broj podataka, ali tako da se omogući brzo pretraživanje. To podrazumeva kompresiju podataka koja zahteva njihovu prethodnu obradu. FBI je ne tako davno usvojio standard za digitalnu kompresiju slike otiska prsta koji se bazira na talasićima. Kompresija se vrši u odnosu 20:1, a razlike između originalne i dekompresovane slike mogu uočiti samo eksperti.

References

[1] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.
[2] A. Haar, *Zur theorie der ortogonalen funktionen-systeme*, Math. Ann. 69 (1910), 331–371.
[3] D. Radunović, *Talasići (Wavelets)*, Akademska misao, Beograd, 2005.

WAVELETS

Wavelets are very strong tool in time-frequency analysis of signals and images (2D signals). Instead of classical Fourier frequency analysis, they are very adequate for processing very sharp and fast changeable signal, as they are compactly supported and oscillatory. Wavelet is generated by the scaling function, which is the solution of dilatation equation. An adequate choice of wavelet for representing the signal enables high compression, which is very desirable for storage and transport of data.

Key words: signal processing, Fourier analysis, wavelets, scaling functions, pyramid algorithm, compression.