Desarrollos matemáticos para calcular el Indicador de previsión "Tiempo de descripción de una agrupación documental" e indicadores de previsión asociados

Vicente Morales-Becerra

Archivo Municipal de Tomelloso (Ciudad Real, España)

Félix Alcarazo-Montero

Instituto de Astronomía y Geodesia, Centro Superior de Investigaciones Científicas

Resumen: El trabajo se centra en la determinación de las expresiones matemáticas de un cuerpo de indicadores de previsión a utilizar en el ámbito de las Unidades de Información y Documentación, todas ellos piezas necesarias para poder determinar la expresión matemática del indicador de previsión "Tiempo de descripción de un agrupación documental". Este indicador va a permitir determinar el tiempo que será necesario emplear para describir una agrupación documental que, o bien permanece estática, o bien se incrementa periódicamente. Como corolario, se ha obtenido otro indicador de previsión que permite determinar la cantidad de trabajo descriptivo que habrá que realizar en un ejercicio para poder describir una agrupación documental, o una parte de ella, en un tiempo determinado.

Palabras clave: Unidades de Información y Documentación; Indicadores de gestión; Indicadores de previsión; Previsión de crecimiento documental; Previsión de descripción documental; Previsión de tiempo de descripción.

Abstract: The work focuses on the determination of the mathematical expressions of a body of forecasting indicators in the field of the Units of Information and Documentation, all of them parts needed to determine the mathematical expression of the indicator of forecast "Time of description of a documentary group". This indicator will allow determining the time necessary to describe a documentary group that either remains static or periodically increases. As a corollary, there has been obtained another indicator of forecast that allows to determine the amount of descriptive work that must be performed in a exercise to describe a documentary group, or a part of it, in a certain time.

Keywords: Units of Information and Documentation; Management indicators; Forecast indicators; Forecast growth documentary; Forecast documentary description; Forecast time description.

Desarrollos matemáticos para calcular el indicador de previsión "Tiempo de descripción de una agrupación documental" e indicadores de previsión asociados

1. Indicador de agrupación documental existente en un tiempo determinado

Llamemos a_0 al valor numérico de una agrupación documental en el tiempo t_0. Si dicha agrupación documental no permanece estática, es decir, si experimenta ingresos periódicos, estos se podrán cuantificar como un incremento medio porcentual del valor de la agrupación documental en el tiempo t_0.

En el epígrafe siguiente veremos cómo se calcula este indicador, al que hemos llamado "Indicador de incremento medio porcentual temporal de una agrupación documental", de momento, de cara a nuestra actual explicación, lo llamaremos $\bar{I}$.

Como decíamos, si la agrupación documental vale a_0 en el tiempo t_0, y si dicha agrupación no permanece estática, los incrementos que experimente se podrán cuantificar como un incremento medio porcentual temporal del valor de la agrupación documental a_0.

Así, en el tiempo t_1, la agrupación documental tendrá el valor a_1, que no es sino la suma del valor de la agrupación documental del ejercicio anterior (a_0) más el incremento medio porcentual temporal $\bar{I}$ multiplicado por dicho valor a_0.

$$a_1 = a_0 + a_0\bar{I} = a_0(1+\bar{I})$$

En el año t_2, nuestra agrupación documental tomará el valor resultado de la suma del fondo del año anterior (a_1) más el incremento medio porcentual temporal $\bar{I}$ multiplicado por dicho valor a_1.

$$a_2 = a_1 + a_1\bar{I} = a_0(1+\bar{I}) + a_0(1+\bar{I})\bar{I} = a_0(1+\bar{I})^2$$

Y así, por inducción matemática[1], para cualquier año.

$$a_3 = a_2 + a_2\bar{I} = a_0(1+\bar{I})^2 + a_0(1+\bar{I})^2\bar{I} = a_0(1+\bar{I})^3$$

…

$$a_t = a_{(t-1)} + a_{(t-1)}\bar{I} = a_0(1+\bar{I})^{(t-1)} + a_0(1+\bar{I})^{(t-1)}\bar{I} =$$
$$= a_0(1+\bar{I})^{(t-1)}(1+\bar{I}) = a_0(1+\bar{I})^t$$

$$\boxed{\boldsymbol{a_t = a_0(1+\bar{I})^t}}$$

[1] El principio de inducción matemática es una importante propiedad de los enteros positivos. Es útil para demostrar enunciados en que intervienen enteros positivos cuando se sabe que los enunciados son válidos para $n = 1, 2, 3$, pero se sospecha o conjetura que son válidos para todos los enteros positivos. El método consiste en los siguientes pasos: 1) Verificar el enunciado para $n = 1$ (o para otro entero positivo); 2) Suponer cierto el enunciado para $n = k$ siendo k un entero positivo; 3) A partir de la suposición de 2) se demuestra que el enunciado es válido para $n = k + 1$. Esta es la parte de la demostración que establece la inducción y puede ser difícil y hasta imposible; 4) Como el enunciado es cierto para $n = 1$ [por el primer paso] debe ser cierto [por el paso 3)] para $n = 1 + 1 = 2$ y, por tanto, para $n = 2 + 1 = 3$, etc., y entonces debe ser cierto para todos los enteros positivos. Véase, por ejemplo: Spiegel (1999: 7).

Así pues, el valor numérico de la agrupación documental en el año t es igual al valor numérico del fondo en el año t_0 multiplicado por la suma de 1 más el incremento medio porcentual temporal del fondo $\bar{I}$ elevado a la potencia representada por el año t.

Si la agrupación documental permaneciera estática, supondría que el valor de $\bar{I} = 0$ y, por tanto, el valor de la agrupación documental en el tiempo t sería igual que el valor de la agrupación documental en el tiempo t_0.

$$a_t = a_0(1+\bar{I})^t = a_0(1+0)^t = a_0 \times 1^t = a_0$$

$$\boxed{\boldsymbol{a_t = a_0}}$$

2. Indicador de incremento medio porcentual temporal de una agrupación documental

Se ha definido el indicador de incremento medio porcentual temporal de una agrupación documental como: "El valor medio de incremento porcentual en el número de unidades de descripción de una agrupación documental en un periodo de tiempo determinado".

Se tomará el valor medio ya que el incremento de unidades de descripción de una agrupación documental en un periodo de tiempo puede diferir de forma relativamente significativa de un ejercicio para otro. Al tomar el valor medio de los valores obtenidos a lo largo de un periodo de varios ejercicios, podremos determinar de manera relativamente confiable cómo nuestra agrupación documental se incrementa de media temporalmente.

Al determinar el incremento medio porcentual temporal de la agrupación documental, encontraremos una expresión matemática que normalice ese incremento hallado a un determinado valor que llamaremos $\bar{I}$.

Si añadimos ese incremento $\bar{I}$ al valor inicial de nuestra agrupación documental (al que hemos llamado a_0) podremos determinar el valor de nuestra agrupación documental con bastante precisión a partir del ejercicio t_5. Entendemos que para menor número de mediciones, la variabilidad del incremento puede hacer que el error cometido sea elevado.

Despejando $\bar{I}$ en la ecuación obtenida en el apartado anterior $a_t = a_0(1+\bar{I})^t$ tendremos el valor del indicador buscado:

$$(1+\bar{I})^t = \frac{a_t}{a_0}$$

$$1+\bar{I} = \left(\frac{a_t}{a_0}\right)^{1/t}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\bar{I} = \left(\frac{a_t}{a_0}\right)^{1/t} - 1}}$$

3. Indicador de agrupación documental descrita en un tiempo determinado

Consideramos que en nuestra UID, en cada ejercicio, si los recursos aplicados a una tarea no varían, se describe el mismo valor numérico de la agrupación documental.

Ahora bien, para calcular de forma más exacta este valor, deberá hallarse una media de los valores de la agrupación documental descrita anualmente. Esto es así porque, de un ejercicio para otro, este indicador puede variar por diversas circunstancias, aún dedicándose idénticos recursos. Por tanto, el valor medio nos dará un valor más aproximado de la agrupación documental descrita en un tiempo determinado.

El valor medio $\bar{b}$ se obtendrá de la expresión matemática siguiente:

$$\bar{b} = \frac{\sum_{t=1}^{t=5} b_t}{t}$$

Ahora bien, también puede ocurrir que en nuestra UID ya existiera una determinada parte de nuestra agrupación documental que ya estuviera descrita, a este valor lo vamos a llamar b_0.

Con estos elementos, podemos determinar la expresión matemática que nos va a permitir conocer el valor de la agrupación documental descrita en un tiempo t determinado. Esta será:

$$\boxed{\boldsymbol{b_t = b_0 + \bar{b}t}}$$

Así pues, el indicador de agrupación documental descrita en un tiempo determinado tomará el valor numérico dado por la suma de la agrupación documental descrita en un tiempo inicial (b_0) más la multiplicación del tiempo determinado por el valor medio de la agrupación documental descrita en cada unidad de tiempo considerada.

4. Indicador de tiempo de descripción de una agrupación documental

4.1. Ecuación de partida

Con las ecuaciones halladas en los epígrafes 1 y 3 vamos a poder hallar la expresión matemática del indicador de tiempo de descripción de una agrupación documental.

Su definición es: "Tiempo que se va a necesitar para describir una agrupación documental dada".

Para su determinación, vamos a necesitar partir de las expresiones matemáticas del indicador de agrupación documental existente en un tiempo determinado (obtenida en el epígrafe 1) y del indicador de agrupación documental descrita en un tiempo determinado (obtenida en el epígrafe 3).

Así pues, conocidas una y otra, podremos convenir que, cuando el valor de la agrupación documental descrita en un tiempo determinado (**expresión obtenida en el epígrafe 3:** $b_t = b_0 + \bar{b}t$), sea igual al valor de la agrupación documental existente en ese mismo tiempo determinado (**expresión obtenida en el epígrafe 1:** $a_t = a_0(1+\bar{I})^t$), la agrupación documental habrá sido descrita por completo.

En forma matemática:

Indicador obtenido en el epígrafe 1: $a_t = a_0(1+\bar{I})^t$

Indicador obtenido en el epígrafe 3: $b_t = b_0 + \bar{b}t$

$a_t = b_t$

Luego, la expresión que buscamos es:

$$\boxed{\boldsymbol{a_0(1+\bar{I})^t = b_0 + \bar{b}t}}$$

En esta ecuación, bastará con despejar t para encontrar la expresión matemática del indicador buscado. No obstante, dicha tarea no es inmediata, siendo preciso, para acometer la resolución del problema planteado, hacer uso de un estudio matemático de las expresiones obtenidas hasta el momento.

4.2. Estudio de la existencia de soluciones

En el epígrafe 4.1 hemos obtenido una ecuación matemática en la que, al despejar la incógnita t, podremos obtener la expresión matemática del indicador de tiempo de descripción de una agrupación documental, objeto del presente trabajo.

En dicha ecuación, $\boldsymbol{a_0(1+\bar{I})^t = b_0 + \bar{b}t}$, lo que en realidad tenemos es la equidad entre dos funciones, a las que vamos a llamar $f(t)$ y $g(t)$ cuyas expresiones son las siguientes:

$f(t) = a_0(1+\bar{I})^t$, donde a_0 e I son constantes, $a_0 > 0$ y $0 \leq \bar{I} \leq 1$

$g(t) = b_0 + \bar{b}t$, donde b_0 y b son constantes, $b_0 \geq 0$ y $\bar{b} > 0$

Los teoremas sobre continuidad de las funciones (véase, por ejemplo: Spiegel, 1999: 25-26), nos indican que tanto $f(t)$ como $g(t)$ son continuas, así como que $f(t) - g(t)$ es una función continua, es decir, que la función $a_0(1+\bar{I})^t - (b_0 + \bar{b}t)$ es continua.

Dichos teoremas de continuidad también nos dicen que si $f(x)$ es continua en $[m,n]$ y si $f(m)$ y $f(n)$ tienen signos opuestos, hay al menos un número $c \in \mathbb{R}$ para el cual la función $f(x)$ tendrá una solución real en el intervalo $[m,n]$.

En nuestro caso, la función resultante de restar $f(t) - g(t)$, a la que podemos llamar $h(t)$, tendrá una solución real si existe un número c perteneciente al intervalo $[m,n]$ en el que la función es continua, si $h(m)$ y $h(n)$ tienen signos opuestos.

Ahora bien, por la definición que hemos hecho del "Indicador de agrupación documental descrita en un tiempo determinado" podrá ocurrir que, según los valores de a_0, $\bar{I}$, b_0 y $\bar{b}$, la función $h(t)$ tome valores opuestos o no en el punto $h(m)$ y en el punto $h(n)$.

Esto significará que no podremos decir que la función $h(t)$ tenga al menos una solución real en el intervalo $[m,n]$. Es decir, no podemos asegurar que nuestra función $h(t) = a_0(1+\bar{I})^t - (b_0 + \bar{b}t)$ tenga solución dentro de los números reales.

Es decir, la ecuación resultante de restar $f(t) - g(t)$ puede no tener una solución real. Circunstancia esta que se va a traducir, en términos prácticos, en que van a existir circunstancias en que va a ser imposible describir la agrupación documental propuesta con los valores proporcionados por la UID para las distintas variables que componen la fórmula matemática del indicador de previsión objeto del presente Trabajo.

4.3. Desarrollo de Maclaurin de la función exponencial

Como vimos en el epígrafe 4.1, la ecuación que nos va a permitir obtener la expresión matemática del indicador de tiempo de descripción de una agrupación documental, objeto del presente trabajo, al que hemos llamado t , es:

$$\boldsymbol{a_0(1+\bar{I})^t = b_0 + \bar{b}t}$$

En el epígrafe 4.2, hemos visto que las funciones $f(t) = a_0(1+\bar{I})^t$ y $g(t) = b_0 + \bar{b}t$ son continuas en todo el intervalo finito y que la función $h(t) = f(t) - g(t)$ es también continua y que puede no tener una solución real en el intervalo $[m,n]$; es decir, aplicándolo a nuestro supuesto, puede que los valores de a_0, $\bar{I}$, b_0 y $\bar{b}$ sean tales que nunca se pueda describir la agrupación documental dada en el porcentaje considerado.

El siguiente paso de cara a obtener el valor de t será convertir la función exponencial $f(t)$ en otra que facilite las operaciones matemáticas necesarias para despejar el valor de t.

Uno de los procedimientos más habituales consiste en ver si la función exponencial $f(t) = a_0(1+\bar{I})^t$ se puede aproximar mediante un polinomio o serie de potencias.

Para ello haremos uso del teorema que establece que: *si una función se puede representar por medio de una serie de potencias de x, esta es necesariamente de la forma serie de Maclaurin,*

$f(V) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots$" (véase, por ejemplo: Ayres, 1987: 242).

La fórmula de Maclaurin es un caso particular de la fórmula de Taylor, en la que se realiza el desarrollo de una función mediante una serie de potencias de $(x-a)$, cuando $a = 0$.

Una función $f(x)$ se puede representar por una serie de Maclaurin si:

- Ella y sus n primeras derivadas son continuas en un intervalo que contiene al punto $x = 0$, con lo que existirán dos números, x_0 y x_0^* comprendidos entre 0 y $\H{U}$, de manera que:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x),$$

siendo el Resto de Lagrange $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$ (v.p.e.: Ayres, 1987: 248).

- El $\lim_{n\to\propto} R_n = 0$ (v.p.e.: Spiegel, 1999; 61).

Con estas premisas vamos a estudiar si nuestra función $f(t) = a_0(1+\bar{I})^t$ se puede representar por una serie de Maclaurin.

Para simplificar las operaciones, vamos a llamar k a la expresión $(1+\bar{I})$ y vamos a establecer que $a_0 = 1$, con lo que nuestra función tomará ahora la forma siguiente: $f(t) = k^t$.

A continuación, vamos a ver si se cumple la primera condición, es decir, que la función $f(t)$ y sus n primeras derivadas son continuas en un intervalo que contiene al punto $t = 0$.

Como vimos en 8.4.2., la función $f(t)$ es continua en todo intervalo finito, siempre que $k > 0$, siendo su valor cuando $t = 0$ el siguiente: $f(0) = k^0 = 1$

Las primeras n derivadas de $f(t)$ son:

$f'(t) = k^t \ln k$

$f''(t) = k^t(\ln k)^2$

$f'''(t) = k^t(\ln k)^3$

…

Las cuales también son continuas en todo intervalo finito, siempre que $k > 0$, conforme vimos en el epígrafe 4.2 de acuerdo al segundo teorema sobre continuidad, y por tanto, en el intervalo que contiene al punto $t = 0$.

$f'(0) = \ln k$

$f''(0) = (\ln k)^2$

$f'''(0) = (\ln k)^3$

…

Por lo que la primera condición se cumple.

Estudiemos ahora el cumplimiento de la segunda condición, es decir, que el $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

Como vimos, $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$, que con los datos de nuestro caso toma la forma: $R_n(x) = \frac{k^{x_0}(\ln k)^n}{n!}x^n$.

En dicha expresión observamos la existencia de tres factores: $\frac{x^n}{n!}$, k^{x_0}, $(\ln k)^n$.

- El factor $\frac{x^n}{n!}$ es el término general de $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ que, sabemos, es convergente para todos los valores de x (Ayres, 1987: 239), por tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{|x^n|}{n!} = 0$.
- El factor k^{x_0} es finito e independiente del valor x (Ayres, 1987: 249).
- El factor $(\ln k)^n$ es una constante.

Luego, $\lim_{n\to\infty} \frac{k^{x_0}(\ln k)^n}{n!} x^n = (\ln k)^n \lim_{n\to\infty} k^{x_0} \frac{x^n}{n!} = 0$.

Con lo que queda demostrado que la segunda condición se cumple también.

En consecuencia, el desarrollo de k^x es válido para todos los valores de x , por tanto, la función $f(t) = k^t$ se puede representar por una serie de Maclaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x),$$

siendo $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$ (Resto de Lagrange), en la forma siguiente:

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + R_n(t),$$

siendo $R_n(t) = \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}t^n$.

Sustituyendo por los valores conocidos de $f(0)$ y de las primeras n derivadas de dicha función, tenemos:

$$f(t) = k^t = 1 + (\ln k)t + \frac{(\ln k)^2}{2!}t^2 + \frac{(\ln k)^3}{3!}t^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + R_n(\square),$$

Pero, como en realidad $f(t) = a_0 k^t$, habrá que multiplicar por a_0 el desarrollo obtenido.

Así pues, la expresión resultante, tomando hasta el término cuadrático, para simplificar posteriores cálculos (al tomar solo hasta el término cuadrático se está cometiendo un error que habrá que determinar para que el cálculo realizado sea lo más exacto posible; su determinación se ha realizado en el epígrafe 4.5), será:

$$f(t) = a_0 k^t = a_0 \left(1 + (\ln k)t + \frac{(\ln k)^2}{2!}t^2\right)$$

Y deshaciendo el cambio hecho de $k = 1 + \bar{I}$:

$$f(t) = a_0\left(1 + (\ln(1+\bar{I}))t + \frac{(\ln(1+\bar{I}))^2}{2!}t^2\right)$$
$$= a_0 + a_0(\ln(1+\bar{I}))t + a_0\frac{(\ln(1+\bar{I}))^2}{2}t^2$$

Con lo que, la función exponencial $f(t) = a_0(1+\bar{I})^t$ ha quedado expresada en forma de un serie de potencias, o polinomio, de segundo grado.

4.4. Resolución de la ecuación

Una vez expresada la función exponencial $f(t)$ como un polinomio de segundo grado, vamos a poder resolver la ecuación obtenida en el epígrafe 4.1 como cualquier otra ecuación de segundo grado.

Así, pues, si:

$f(t) = a_0(1+\bar{I})^t$, donde a_0 e $\bar{I}$ son constantes, $a_0 > 0$ y $0 \leq \bar{I} \leq 1$

$g(t) = b_0 + \bar{b}t$, donde b_0 y $\bar{b}$ son constantes, $b_0 \geq 0$ y $\bar{b} > 0$

Como hemos visto en el epígrafe anterior 4.3, la función $f(t)$ se puede expresar como:

$$f(t) = a_0 + a_0(\ln(1+\bar{I}))t + a_0\frac{(\ln(1+\bar{I}))^2}{2}t^2$$

Donde, de cara a facilitar la notación, vamos a llamar m al $\ln\left(1+\bar{I}\right)$, con lo que:

$$f(t) = a_0 + a_0mt + a_0\frac{m^2}{2}t^2$$

Como vimos en el epígrafe 4.1, la ecuación que se pretende resolver es aquella en que $f(t) = g(t)$, es decir:

$$a_0 + a_0mt + a_0\frac{m^2}{2}t^2 = b_0 + \bar{b}t$$

Ordenando, queda:

$$a_0\frac{m^2}{2}t^2 + \left(a_0m - \bar{b}\right)t + (a_0 - b_0) = 0$$

Y multiplicando por 2 ambos términos de la ecuación, al objeto de eliminar divisores, tendremos:

$$\boxed{a_0m^2t^2 + 2\left(a_0m - \bar{b}\right)t + 2(a_0 - b_0) = 0}$$

Que es una ecuación de segundo grado en t en la que bastará despejar la incógnita t para encontrar la expresión matemática del indicador buscado en este Trabajo de Investigación.

Como sabemos, la resolución de una ecuación de segundo grado adopta la forma siguiente:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Con lo cual, resolviendo en nuestra ecuación, tendremos:

$$t = \frac{-2\left(a_0 m - \bar{b}\right) \pm \sqrt{\left[2\left(a_0 m - \bar{b}\right)\right]^2 - 4a_0 m^2 2(a_0 - b_0)}}{2a_0 m^2}$$

$$t = \frac{-2\left(a_0 m - \bar{b}\right) \pm 2\sqrt{\left(a_0 m - \bar{b}\right)^2 - 2a_0 m^2 (a_0 - b_0)}}{2a_0 m^2}$$

$$t = \frac{-\left(a_0 m - \bar{b}\right) \pm \sqrt{\left(a_0 m - \bar{b}\right)^2 - 2a_0 m^2 (a_0 - b_0)}}{a_0 m^2}$$

$$t = \frac{\bar{b} - a_0 m \pm \sqrt{a_0^2 m^2 + \bar{b}^2 - 2a_0 m \bar{b} - 2a_0^2 m^2 + 2a_0 b_0 m^2}}{a_0 m^2}$$

$$t = \frac{\bar{b} - a_0 m \pm \sqrt{\bar{b}^2 + a_0 m\left(2b_0 m - a_0 m - 2\bar{b}\right)}}{a_0 m^2}$$

Y deshaciendo el cambio por el que hemos llamado m al $\ln\left(1+\bar{I}\right)$, tendremos:

$$t = \frac{\bar{b} - a_0 \ln(1+\bar{I}) \pm \sqrt{\bar{b}^2 + a_0 \ln(1+\bar{I}) \left[\left(2b_0 \ln(1+\bar{I}) - a_0 \ln(1+\bar{I}) - 2\bar{b}\right)\right]}}{a_0 \left[\ln(1+\bar{I})\right]^2}$$

Como toda expresión de solución de una ecuación de segundo grado, aparecen dos valores como posibles soluciones: el correspondiente al signo negativo y el correspondiente al signo positivo, ambos derivados del operador $\pm$ que aparece en la expresión obtenida.

Para determinar cuál de ellos es el que debemos utilizar para obtener el valor válido del indicador de tiempo de descripción t de una agrupación documental, se pueden asignar valores a los indicadores a_0, b_0, $\bar{b}$ e $\bar{I}$, y ver qué resultados proporcionan en función de que utilicemos el signo negativo o el positivo en la ecuación.

En la siguiente tabla se ha procedido a asignar diversos valores a los indicadores y a calcular el valor de t en función de que se utilice el signo negativo o el positivo:

$\bar{I}$	a_0	b_0	$\bar{b}$	**Valor de t utilizando el signo positivo $(+)$**	**Valor de t utilizando el signo negativo $(-)$**
0,1	10000	2500	1000	198191,441	7,576
0,5	10000	7500	3000	23718,203	0,847
1	1000	900	100	1817,907	1,111
1	10000	2500	500	789,828	19,182
2,5	13500	3000	800	82,436	30,948

Como vemos, para el caso tercero, el de una agrupación documental que cuenta con 1.000 materiales, de los que ya estén descritos 900 y de la que se describen 100 al año, y que tiene un crecimiento anual del 1%, es evidente, sin necesidad de utilizar indicador alguno, que en poco más de un año se realizará la descripción completa de la misma.

Este resultado se obtiene también al utilizar el signo negativo para calcular el valor de t en la ecuación hallada, mientras que al calcularlo utilizando el signo positivo se obtiene un valor cercano a los 1.818 años. En el resto de casos, si bien algo más complejos, el resultado válido siempre es el proporcionado por la utilización del signo negativo en la ecuación hallada.

Así pues, los valores de t proporcionados utilizando el signo positivo no son reales, aunque puedan suponer una solución para la ecuación hallada. De ahí que se deba utilizar la expresión con el signo negativo para determinar el valor del indicador buscado.

Por tanto, la expresión matemática que buscamos es la siguiente:

$$\boxed{\boldsymbol{t = \frac{\bar{b} - a_0 \ln(1+\bar{I}) - \sqrt{\bar{b}^2 + a_0 \ln(1+\bar{I})\,[(2b_0 \ln(1+\bar{I}) - a_0 \ln(1+\bar{I}) - 2\bar{b})]}}{a_0\,[\ln(1+\bar{I})]^2}}}}$$

Que es la **expresión matemática del indicador de tiempo de descripción t de una agrupación documental** en función de a_0 (valor numérico de la agrupación documental dada en el tiempo t_0), b_0 (valor numérico de la agrupación documental descrita en el tiempo t_0), $\bar{b}$ (valor medio de la agrupación documental descrita en cada unidad de tiempo considerada) e $\bar{I}$ (indicador de incremento medio porcentual temporal de una agrupación documental).

4.5. Error cometido

Como vimos en el epígrafe 4.3, cuando a la hora de desarrollar la función $f(t) = a_0(1+\bar{I})^t$ mediante una serie de Taylor, haciendo la reducción de Maclaurin, solo se tomó hasta el término cuadrático, esto es, los tres primeros términos de la serie. Esto implica la existencia de un error en los resultados obtenidos al no tomarse todos los términos de ella.

El valor de este error se calcula haciendo uso del teorema que establece que:

> *Si el desarrollo de la función $f(x)$ está formado por una serie de Taylor y $x = \varepsilon$ es un valor de su campo de convergencia, el error que se comete al tomar como valor de $f(\varepsilon)$ la suma de los n primeros términos de la serie es menor que $\frac{M}{n!}|x-a|^n$, siendo M igual o mayor que el máximo valor de $\left|f^{(n)}(x)\right|$ en el intervalo desde a hasta ε. Para una serie de Maclaurin, $a = 0$* (véase, por ejemplo: Ayres, 1999: 251).

Aplicando dicho teorema a nuestra función $f(t)$, dirá que: si el desarrollo de $f(t)$ está formado por una serie de Maclaurin y $t = \varepsilon$ es un valor de su campo de convergencia, el error que se comete al tomar como valor de $f(\varepsilon)$ la suma de los 3 primeros términos de la serie es menor que $\frac{M}{n!}|t|^3$, siendo M igual o mayor que el máximo valor de $\left|f^{(3)}(t)\right|$ en el intervalo desde 0 hasta ε.

Como vimos también en el epígrafe 4.3, el valor de $f^{(3)}(t) = k^t(\ln k)^3$, siendo $k = (1+\bar{I})$.

La representación gráfica de $f^{(3)}(t)$ es una curva exponencial en la que, para cualquier $t_i < t_{i+1}$ ocurre que $f(t_i) < f(t_{i+1})$, con $0 < t_i < t_{i+1} < \varepsilon$. Es decir, el máximo valor de $\left|f^{(3)}(t)\right|$ en el intervalo desde 0 hasta ε es $\left|f^{(3)}(\varepsilon)\right| = |k^\varepsilon(\ln k)^3|$.

Con estos datos, y haciendo uso de la aplicación del teorema anteriormente expuesto a nuestra función $f(t)$, podremos decir que, al hacer el desarrollo de la misma mediante una serie de Maclaurin y siendo ε una valor de su campo de convergencia (que podrá ser la solución a la ecuación $f(t) = g(t)$), el error que se comete al tomar como valor de $f(\varepsilon)$ la suma de los 3 primeros términos de la serie es menor que:

$$\frac{k^\varepsilon(\ln k)^3}{3!}|\varepsilon|^3$$

Y deshaciendo el cambio hecho en k tendremos:

$$\boxed{\boldsymbol{error} < \frac{\mathbf{(1+\bar{I})^{\varepsilon}\left(\ln(1+\bar{I})\right)^3}}{\mathbf{3!}}|\boldsymbol{\varepsilon}|^{\mathbf{3}}}$$

Donde $\bar{I}$ es el indicador de incremento medio porcentual temporal de una agrupación documental y ε el indicador de tiempo de descripción de esa misma agrupación documental.

5. Resultado derivado «Indicador de velocidad de descripción de una agrupación documental en un tiempo dado

Como corolario de nuestra investigación, podremos calcular un nuevo indicador: el de velocidad de descripción de una agrupación documental en un tiempo dado, que se define como: "El número de unidades que hay que describir de una agrupación documental dada para poder describirla en la cantidad establecida en un tiempo determinado".

a) Cantidad descrita del 100%:

Como vimos, la ecuación de la que partíamos para establecer el tiempo de descripción de una agrupación documental dada era:

$$a_0(1+\bar{I})^t = b_0 + \bar{b}t$$

Puesto que conocemos:

- El valor inicial de la agrupación documental en el tiempo t_0, al que hemos llamado a_0.
- El valor numérico de la agrupación documental descrito en el tiempo t_0, al que hemos llamado b_0.
- El incremento medio porcentual anual de la agrupación documental, al que hemos llamado $\bar{I}$.

Podremos calcular el valor de $\bar{b}$, al que hemos llamado Valor numérico de descripción anual, de la siguiente forma:

$$a_0(1+\bar{I})^t = b_0 + \bar{b}t$$

$$\bar{b}t = a_0(1+\bar{I})^t - b_0$$

$$\boxed{\boldsymbol{\bar{b} = \frac{a_0(1+\bar{I})^t - b_0}{t}}}$$

b) Cantidad descrita del x%:

Generalizando la expresión hallada en el epígrafe anterior para un tanto por ciento que no tenga por qué coincidir con el 100%, tendremos que partir de la siguiente ecuación:

$$a_0(1+\bar{I})^t \frac{x}{100} = b_0 + \bar{b}t$$

Donde x será el tanto por ciento de la agrupación documental que queremos describir en un tiempo 1.

Despejando en la ecuación anterior el valor de $\bar{b}$ tendremos:

$$a_0(1+\bar{I})^t x = \left(b_0 + \bar{b}t\right)100$$

$$a_0(1+\bar{I})^t x = 100b_0 + 100\bar{b}t$$

$$\boxed{\boldsymbol{\bar{b} = \frac{a_0(1+\bar{I})^t x - 100b_0}{100t}}}$$

6. Ejemplo de aplicación

Un archivo, a fecha de 1 de enero de 2014, cuenta con 13.300 cajas de documentación, de las cuales, 3.700 están descritas. El incremento medio anual desde el año 2009 es de 470 cajas, mientras que la media de descripción anual es de 600 cajas. Con estos valores, a) ¿se podrá describir completamente el fondo con el actual ritmo de descripción?, b) ¿qué cantidad de cajas habría que describir al año para catalogar el archivo en 10 años?

a) De los datos del caso planteado, sabemos que:

En el año 2014, $a_0 = 13300$

$$\sum_{t=2007}^{t=2012} I_t = 470 \times 5 = 2350$$

$b_0 = 3700$

$\bar{b} = 600$

De donde podemos deducir que el valor de a_0 en el año 2009 era:

$a_0 = a_5 - 2350 = 13300 - 2350 = 10950$

Sabemos que el valor de I se calcula a partir de la expresión expuesta en el epígrafe 2., que era la siguiente:

$$\boldsymbol{\bar{I} = \left(\frac{a_t}{a_0}\right)^{1/t} - 1}$$

Para nuestro ejemplo:

$$\bar{I} = \left(\frac{13300}{10950}\right)^{1/5} - 1 = 0.03965$$

Es decir, el incremento medio porcentual anual del fondo, obtenido al multiplicar el valor de $\bar{I}$ por 100, ha sido de un 3,965%.

Con estos datos, no queda sino sustituir sus valores en la ecuación hallada en el epígrafe 4.4., para obtener el "Indicador de tiempo de descripción de una agrupación documental". De esta forma:

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{\bar{b} - a_0 \ln(1+\bar{I}) - \sqrt{\bar{b}^2 + a_0 \ln(1+\bar{I})\,[\left(2 b_0 \ln(1+\bar{I}) - a_0 \ln(1+\bar{I}) - 2\bar{b}\right)]}}}{\boldsymbol{a_0\,[\ln(1+\bar{I})]^2}}$$

$$t = \frac{600 - 13300\ln(1+0.03965) - \sqrt{600^2 + 13300\ln(1+0.03965)\,[(2\times 3700\ln(1+0.03965) - 13300\ln(1+0.03965) - 2\times 600)]}}{13300\,[\ln(1+0.03965)]^2}$$

$$t = número\ imaginario$$

Esto quiere decir que, con los valores de $a_0 = 13300$, $\bar{I} = 0.03965$, $b_0 = 3700$ y $\bar{b} = 600$, la ecuación no tiene solución real y que, por tanto, **el fondo no se podrá describir nunca en su totalidad con los recursos actuales dedicados a descripción**. Es decir, habrá que aumentar el número de cajas descritas al año (600 en el caso propuesto), para que esta descripción pudiera realizarse, lo que significaría, a su vez, aumentar los recursos de personal dedicados a dichas tareas y, consecuentemente, la asignación presupuestaria.

b) Haciendo uso del resultado derivado, obtenido en el epígrafe 5, **si quisiéramos tener descrito completamente el fondo en un tiempo de 10 años**, habría que avanzar a un ritmo de descripción anual que vendría dado por la expresión matemática expuesta en el mencionado epígrafe:

$$\boldsymbol{\bar{b}} = \frac{\boldsymbol{a_0(1+\bar{I})^t - b_0}}{\boldsymbol{t}}$$

$\bar{b} = \frac{13300(1+0.03965)^{10} - 3700}{10} = \mathbf{1592,11}$ **unidades al año**, es decir 2,65 veces lo que se está haciendo en la actualidad.

7. Bibliografía

- Ayres, Frank. *Teoría y problemas de cálculo diferencial e integral*. Madrid [etc.]: McGraw-Hill, D.L. 1987.
- Spiegel, Murray R. *Cálculo superior*. México [etc]: McGraw-Hill, 1999.
- Thomas, George B. *Cálculo infinitesimal y geometría analítica*. Madrid: Aguilar, 1960.